

Chapitre 3

Calcul algébrique dans $\mathbb{R}$

Plan du chapitre

1	Inégalités dans $\mathbb{R}$	1
1.1	Opérations et inégalités	1
1.2	Majoration et minoration	2
2	Valeur absolue	3
2.1	Valeur absolue	3
2.2	Inégalités triangulaire	4
2.3	Distance entre deux réels	5
3	Équations et inéquations	6
3.1	Principe général	6
3.2	Résoudre une égalité	7
3.3	Appliquer une fonction à une inégalité	8
3.4	Résolution d'(in)équations	9
3.5	(In)équations avec des valeurs absolues	11
4	Partie entière	13
5	Méthodes pour les exercices	16

1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

1.1 Opérations et inégalités

Théorème 3.1 – Opérations et inégalités

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Transitivité de l'inégalité : $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \implies a \leq c$

2. Addition : si deux inégalités sont **dans le même sens**, on peut les additionner :

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \implies a + c \leq b + d$$

3. Multiplication : si on multiplie une inégalité par un réel λ qui est ...

... **positif**, alors le sens est conservé :

... **négatif**, alors le sens est inversé :

$$a \leq b \implies \lambda a \leq \lambda b \quad (\text{si } \lambda \geq 0)$$

$$a \leq b \implies \lambda a \geq \lambda b \quad (\text{si } \lambda \leq 0)$$



On ne peut en aucun cas soustraire des inégalités : $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \not\Rightarrow a - c \leq b - d$

Remarque. Dans les assertions 1 et 2, si une des deux inégalités de départ est stricte, alors l'inégalité de la conclusion est stricte également, par exemple :

$$\begin{cases} a \leq b \\ c < d \end{cases} \implies a + c < b + d$$

En revanche, pour l'assertion 3, il faut non seulement avoir $a < b$ mais aussi une condition de signe strict sur λ . Par exemple, si $a < b$ et $\lambda > 0$, on peut affirmer que $\lambda a < \lambda b$.

Théorème 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels **positifs**. Si $a_1 + \dots + a_n = 0$, alors tous les réels $a_1, \dots, a_n$ sont nuls.

Démonstration. On suppose que $a_1 + \dots + a_n = 0$. Montrons que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad a_i = 0$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$0 \leq a_i \leq a_1 + \dots + a_n = 0$$

donc $a_i = 0$. D'où le résultat. □

1.2 Majoration et minoration

Méthode – Majorer ou minorer une expression

Soit $a, b \in \mathbb{R}$

- Pour majorer $a - b$, il faut majorer a et *minorer* b
- Pour minorer $a - b$, il faut minorer a et *majorer* b
- Pour majorer $\frac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$, il faut majorer a et *minorer* b .
- Pour minorer $\frac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$, il faut minorer a et *majorer* b .

Exemple 1. Soit $x \in [1, 2]$. Majorer et minorer l'expression $\frac{x^2 - \ln x}{x + 3}$.

2 Valeur absolue

2.1 Valeur absolue

Définition 3.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $|x|$ la valeur absolue de x que l'on définit par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On peut également donner la définition équivalente $|x| = \max(x, -x)$, i.e. que $|x|$ est la valeur maximale entre x et $-x$.

Théorème 3.4 – Propriétés évidentes de la valeur absolue

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geq 0$

4. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$

2. $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$

5. $|x| = |-x|$ (la fonction étant paire)

3. Pour tout réel positif a :

$$-a \leq x \leq a \iff |x| \leq a$$

6. $|xy| = |x| \times |y|$ et si $y \neq 0$: $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

En particulier, on peut prendre $a = |x|$ dans 3, de sorte qu'on a : $-|x| \leq x \leq |x|$

On rappelle que pour tout réel positif a , le réel $\sqrt{a}$ est par définition l'unique solution positive de $x^2 = a$.

Théorème 3.5 – Relations entre carré, racine carrée et valeur absolue

Pour tout réel a , on a :

$$|a|^2 = a^2$$

Pour tout réel a **positif**, on a :

$$\sqrt{a^2} = a$$

Pour tout réel a , on a :

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Démonstration. Montrons les assertions de gauche à droite.

- Si a est positif, on a $|a| = a$, donc $|a|^2 = a^2$. Si a est négatif, alors $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.
- $\sqrt{a}$ étant (par définition) solution de $x^2 = a$, on a naturellement $\sqrt{a}^2 = a$.
- Par l'assertion de gauche, $|a|$ est une solution positive de $x^2 = a^2$, donc $\sqrt{a^2} = |a|$.

□

Remarque. Les trois relations du Théorème 3.5 sont extrêmement utiles dans les exercices. Il ne faut pas les confondre !

2.2 Inégalités triangulaire

Théorème 3.6 – Inégalités triangulaire

Soit x et y deux réels.

Première inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$

Seconde inégalité triangulaire : $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Démonstration.

□



On ne peut écrire ~~$|x - y| \leq |x| - |y|$~~ . Par contre, on a :

$$|x - y| = |x + (-y)| \underbrace{\leq}_{1^{\text{ère}} \text{ inég.}} |x| + |-y| = |x| + |y|$$

Exemple 2. Soit $x \in [-1, 4]$ et $y \in [-3, 1]$.

1. Donner un majorant simple de $|x|$ et $|y|$.
2. Démontrer que $|x + 2y| \leq 10$.
3. Démontrer que $|x + 2y| \leq 7$.

2.3 Distance entre deux réels

Définition 3.7

Soit x et a deux réels. La distance de x à a est le nombre réel défini par : $d(x, a) = |x - a|$.

La quantité $|x - a|$ représente en effet la distance entre les réels x et a lorsqu'ils sont disposés sur une droite orientée :

On a toujours $d(x, a) = d(a, x)$: ce réel correspond à la notion intuitive de distance entre deux réels x et a .

Exemple 3. Soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'inéquation $|x - a| \leq \varepsilon$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3 Équations et inéquations

3.1 Principe général

On appelle (in)équation une (in)égalité comportant une ou plusieurs inconnues : on cherche alors pour quelles valeurs de ces inconnues est-ce que l'(in)égalité est vérifiée. Voici deux exemples d'énoncé :

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R} : \quad x + 2 = \sqrt{x + 8}$$

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R} : \quad x - 2 \leq \sqrt{3x + 4}$$

Ici, on comprend que l'inconnue est x (car cette variable n'a pas été introduite avant), et qu'il s'agit d'un réel ("dans $\mathbb{R}$ ").

Remarque. Vos connaissances de terminale vous permettent de résoudre toute (in)équation sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

(avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ des valeurs connues).

Dans ce chapitre, pour résoudre une (in)équation, on va chercher à se ramener à la forme ci-dessus.

Méthode

Pour résoudre une équation ou une inéquation :

1. On détermine les valeurs de x pour lesquelles tous les termes de l'équation ont un sens.
2. On raisonne ensuite par équivalences successives, en essayant de simplifier l'(in)équation par des réécritures, ou en appliquant des fonctions aux deux membres, etc.

Il faut s'assurer à chaque étape **que la nouvelle (in)équation est bien équivalente** à celle qui précède.

On est pour cela souvent amené à recourir à des disjonctions de cas.

La résolution d'(in)équations est donc un exercice d'une extrême rigueur.



Si une équivalence n'est en fait qu'une implication, on peut se retrouver avec une erreur ! Voici un exemple de **résolution incorrecte** de l'équation $x + 2 = \sqrt{x + 8}$:

L'équation n'a de sens que pour $x \in [-8, +\infty[$.

$$\begin{aligned} x + 2 = \sqrt{x + 8} &\iff (x + 2)^2 = x + 8 \\ &\iff x^2 + 4x + 4 = x + 8 \\ &\iff x^2 + 3x - 4 = 0 \\ &\iff (x - 1)(x + 4) = 0 \quad (1 \text{ est racine évidente !}) \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

Or, bien que 1 soit effectivement solution de $x + 2 = \sqrt{x + 8}$, on constate avec effroi que ce n'est pas le cas de -4 ! On va voir très bientôt d'où vient le problème...

3.2 Résoudre une égalité



Si f est définie en a , on a toujours : $a = b \implies f(a) = f(b)$. Cependant, ce n'est pas nécessairement une équivalence : on peut avoir $f(a) = f(b)$ sans que cela implique $a = b$. Par exemple, $\cos(0) = \cos(2\pi)$ alors que $0 \neq 2\pi$.

Remarque. Dans ce chapitre, le problème ci-dessus arrive quasi exclusivement avec le passage au carré. Étudions cela. Bien qu'on ait :

$$a = b \implies a^2 = b^2 \quad (\text{on applique } x \mapsto x^2)$$

On a pour l'autre sens :

$$\dots\dots\dots \Leftarrow a^2 = b^2 \quad (\text{on applique } x \mapsto \dots\dots)$$

Ainsi, bien qu'on puisse assurer que :

$$x + 2 = \sqrt{x + 8} \implies (x + 2)^2 = x + 8 \quad (\text{on applique } x \mapsto x^2)$$

Si on essayait de justifier le sens réciproque, on obtiendrait :

$$\dots\dots\dots \Leftarrow (x + 2)^2 = x + 8 \quad (\text{on applique } x \mapsto \dots\dots)$$

Et donc on ne peut avoir équivalence que si $\dots\dots\dots$. C'est le cas pour $x = 1$, mais pas pour $x = -4$!

Méthode

Lorsqu'on souhaite passer au carré dans une équation de la forme $a(x) = b(x)$, on doit faire des disjonctions de cas pour s'assurer que les expressions $a(x)$ et $b(x)$ ont le même signe.

- Dans le cas où $a(x)$ et $b(x)$ ont le même signe (au sens large), alors on a bien :

$$a(x) = b(x) \iff |a(x)| = |b(x)| \iff a(x)^2 = b(x)^2$$

- Dans le cas contraire, par exemple $a(x) < 0$ et $b(x) > 0$, alors il n'y a pas de solution à $a(x) = b(x)$!

Exemple 4. Résoudre l'équation $x + 5 = \sqrt{x + 11}$.

3.3 Appliquer une fonction à une inégalité

Théorème 3.8 – Appliquer une fonction à une inégalité

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$. Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f(a) \leq f(b)$.
- Si f est décroissante sur $[a, b]$, alors $f(a) \geq f(b)$.
- Si f est *strictement* croissante sur $[a, b]$ et si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
- Si f est *strictement* décroissante sur $[a, b]$ et si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.



Pour appliquer le théorème ci-dessus, il faut que f soit définie et (dé)croissante sur **tout** l'intervalle $[a, b]$. Contre-exemple : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ mais n'est pas définie en zéro.

Ainsi, il est faux d'écrire : $-2 \leq 2 \implies \frac{1}{-2} \leq \frac{1}{2}$

Pour exploiter au mieux ce théorème, il est essentiel d'avoir une bonne représentation mentale des fonctions usuelles. Voici celles qui nous seront utiles :

En prenant des fonctions f particulières, on en déduit les résultats suivants :

Exemple 5. Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$. À chaque fois, préciser dans quels cas on peut réaliser l'opération demandée, et écrire ce que devient l'inégalité en justifiant pourquoi :

- Passer au carré dans l'inégalité $a \leq b$.

- Passer au cube dans l'inégalité $a \leq b$.

- Passer à la racine carrée dans l'inégalité $a \leq b$.

- Passer à l'inverse dans l'inégalité $a \leq b$.

3.4 Résolution d'(in)équations

On peut remarquer que toutes les fonctions f qu'on aura besoin d'appliquer (cf Exemple 6) amènent à faire des disjonctions de cas autour de 0. Cela conduit à la méthode suivante :

Méthode

Lorsqu'on souhaite appliquer une fonction f dans une inéquation de la forme $a(x) \leq b(x)$, on doit faire des disjonctions de cas pour s'assurer que les expressions $a(x)$ et $b(x)$ ont le même signe.

- Dans le cas où $a(x)$ et $b(x)$ ont le même signe (au sens large), alors f est monotone sur $[a(x), b(x)]$ et on peut écrire :

$$a(x) \leq b(x) \quad \boxed{\iff} \quad f(a(x)) \quad \underbrace{\dots\dots\dots}_{\substack{\leq \text{ ou } \geq \text{ selon la} \\ \text{monotonie de } f}} \quad f(b(x)) \quad (\star)$$

- Dans les autres cas, la résolution est triviale. Par exemple si x est pris tel que $a(x) < 0$ et $b(x) > 0$, alors ce x est solution de $a(x) \leq b(x)$!

Le sens réciproque dans $\star$ est automatique ! C'est dû au fait que pour les fonctions f qu'on va appliquer, la fonction "inverse" de f sera toujours (strictement) monotone entre $f(a(x))$ et $f(b(x))$.

Exemple 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x - 2 \leq \sqrt{3x + 4}$$

Exemple 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x+5}{x^2-1} > 1$$

3.5 (In)équations avec des valeurs absolues

Méthode

Pour résoudre une (in)équation avec des valeurs absolues, on peut :

- Mettre au carré l'(in)équation et utiliser le fait que $|\dots|^2 = (\dots)^2$ pour faire disparaître les valeurs absolues.
- Faire un tableau de signes qui contiendra chaque expression dans les valeurs absolues, et résoudre l'(in)équation dans chacun des cas.

Exemple 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$|x + 1| \leq |3x - 1|$$



Il n'est pas toujours possible de faire disparaître toutes les valeurs absolues en mettant au carré (cf exemple plus bas). De plus, passer au carré ne simplifie pas forcément les choses ! Si on a un polynôme de degré 2 dans les valeurs absolues, il devient de degré 4 en passant au carré !

Exemple 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|x^2 - 2x| + |2x - 5| = 4$$

4 Partie entière

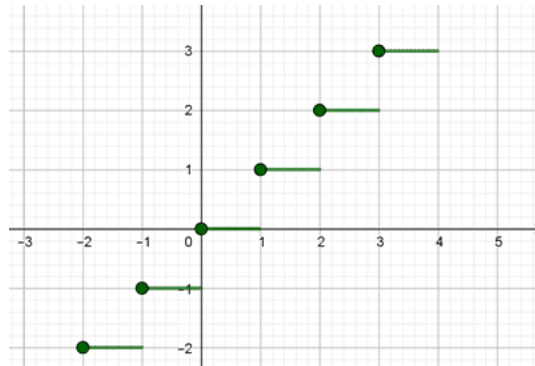
Définition 3.9 – Partie entière

Soit x un réel. On appelle partie entière de x , le plus grand entier p tel que $p \leq x$. Il est noté $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 10. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$.

$$\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = \dots \quad \lfloor \pi \rfloor = \dots \quad \lfloor -e \rfloor = \dots$$

Voici le graphe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (c'est une fonction discontinue) :



Théorème 3.10

La fonction partie entière est croissante : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ $x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

En particulier, si $p \leq x$ et $p \in \mathbb{Z}$, alors $p \leq \lfloor x \rfloor$.

Remarque. Pour tout réel x , on a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{ou de manière équivalente} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

et $\lfloor x \rfloor$ est le seul entier qui vérifie ces inégalités.

Théorème 3.11

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.



L'hypothèse " $k \in \mathbb{Z}$ " est essentielle. Si on essaye de trouver des formules équivalentes pour des réels x et y , on trouve facilement des contre-exemples : ainsi, avec $x = y = 0,9$ on obtient :

$$\begin{cases} \lfloor x + y \rfloor = \dots\dots \\ \lfloor x \rfloor + y = \dots\dots \\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \dots\dots \end{cases}$$



Pour un entier n et un réel x , on a en général $\lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$. Par exemple, avec $x = \frac{1}{2}$, on a $2 \lfloor x \rfloor = \dots\dots$ et $\lfloor 2x \rfloor = \dots\dots$

Remarque. Dans les exercices sur les parties entières, il est souvent fructueux de réécrire chaque x en $\lfloor x \rfloor + \varepsilon$ en posant

$$\varepsilon = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$$

Le réel ε est appelé la partie décimale (ou partie fractionnaire) de x . L'avantage est que $\lfloor x \rfloor$ est un entier qui peut donc sortir librement d'une partie entière (comme l'entier k du Théorème 3.11).

Exemple 11. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Remarque. On retrouve couramment la notation $\lceil x \rceil$ pour désigner le plus petit entier r tel que $x \leq r$.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour résoudre une équation ou une inéquation :

1. On détermine les valeurs de x pour lesquelles tous les termes de l'équation ont un sens.
2. On raisonne ensuite par équivalences successives, en essayant de simplifier l'(in)équation par des réécritures, ou en appliquant des fonctions aux deux membres, etc.

Il faut s'assurer à chaque étape **que la nouvelle (in)équation est bien équivalente** à celle qui précède.

On est pour cela souvent amené à recourir à des disjonctions de cas.

Méthode

Pour résoudre un exercice sur les parties entières dont l'inconnue est x , il est souvent pratique de poser $\varepsilon = x - \lfloor x \rfloor$, i.e. la partie fractionnaire de x et de remplacer chaque x dans une partie entière par $\lfloor x \rfloor + \varepsilon$, et d'utiliser le fait que $0 \leq \varepsilon < 1$ pour limiter les cas à traiter.